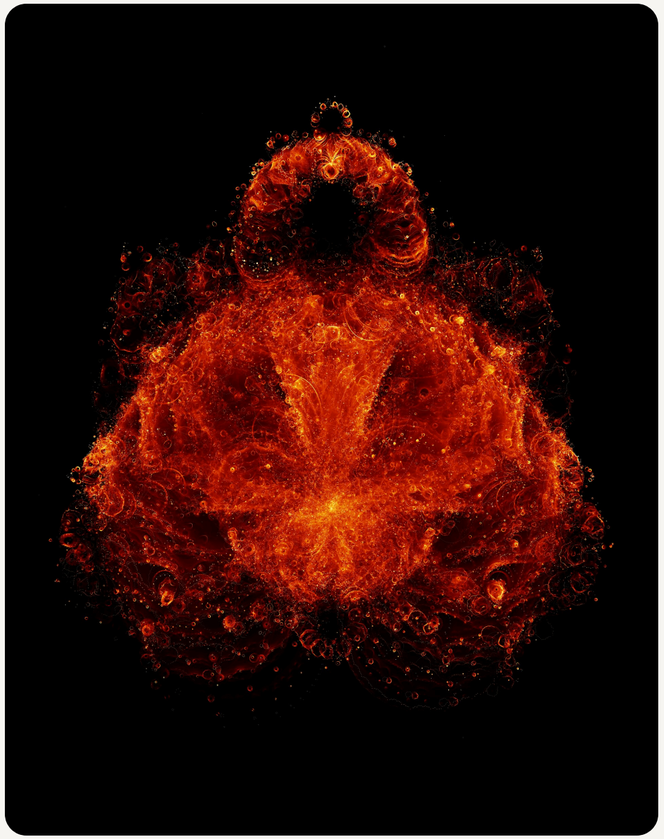
SIENA, NIPS-CERN, UFJF

Limiar

Redes neurais, do neurônio ao fractal

Aula 1: o neurônio e o perceptron

25/09/2026. C∴ Chrysthofer A. A. Afonso



Buddhabrot: o conjunto de Mandelbrot desenhado pelos caminhos dos pontos que fogem. Imagem: Johann Korndoerfer, Wikimedia Commons, CC BY 3.0 DE

1 · REVISÃO

O que ficou da aula de quarta

O que é um modelo?

O que é treinar?

O que é a função de perda?

Por que as redes só deram certo depois de 2012?

Limiar: o nome do curso

Limiar

do latim liminaris, relativo à soleira da porta: o ponto em que se passa de um lado para o outro, e também o começo de alguma coisa.

1 **Neurônio**
o neurônio artificial dispara quando a soma das entradas passa de um limiar

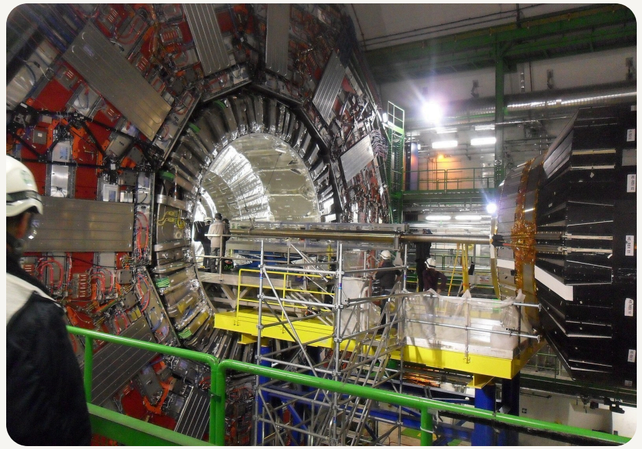
2 **Projeto**
o projeto de dezembro desenha o limiar entre o treino que dá certo e o que explode

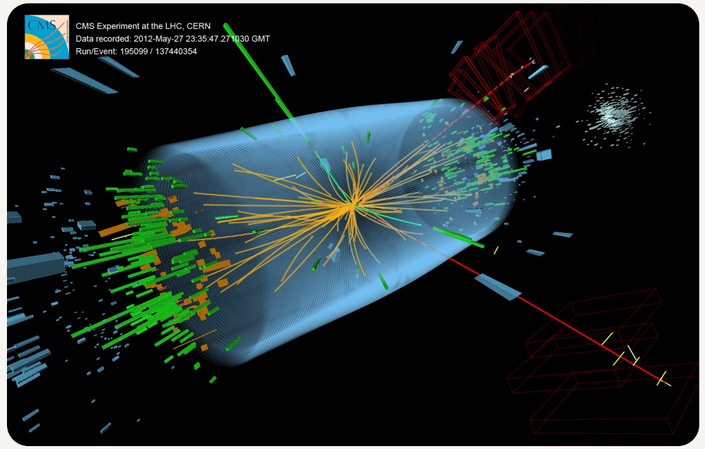
3 **Pesquisa**
para quem acabou de entrar na graduação, o curso é o limiar da pesquisa

2 · COMO O CURSO FUNCIONA

O projeto de dezembro

1. Dados reais do CMS, um dos detectores do CERN.
2. A mesma rede, treinada milhares de vezes, com taxas de aprendizado diferentes.
3. Um mapa de onde o treino dá certo e de onde explode.





À esquerda, o CMS, um dos quatro grandes detectores do LHC, no CERN; foto de Vineet Menon, CC BY-SA 2.0. À direita, uma colisão registrada pelo CMS em 27/05/2012: as linhas vermelhas são múons; CMS Collaboration, Thomas McCauley e Lucas Taylor, CC BY 4.0. As duas do Wikimedia Commons.

DE ONDE VEM O NOME: FRACTAL

do latim fractus, quebrado; nome criado por Benoit Mandelbrot em 1975, como a figura da capa.

O fio do curso, da aula 1 à 10

1	**O neurônio e o perceptron**	um neurônio desenha uma reta, e nenhuma reta separa o XOR	25/09, presencial
2	**Derivada e gradiente**	o passo contra a derivada; a taxa grande demais faz o treino divergir	02/10, presencial
3	**Matrizes e camadas**	duas camadas separam o XOR, com pesos escolhidos à mão	13/11, on-line
4	**O Jacobiano**	a regra da cadeia com vetores, uma camada de cada vez	13/11, on-line
5	**Retropropagação**	a regra da cadeia, de trás para a frente, acha os pesos do XOR	13/11, on-line
6	**O MNIST em NumPy**	um MLP em 70 mil dígitos escritos à mão, com treino, validação e teste	27/11, on-line
7	**PyTorch**	a biblioteca faz a retropropagação; o erro final contra a taxa	27/11, on-line
8	**Os dados do CERN**	um MLP estima a massa dos dois múons, conferida pela fórmula	04/12, on-line
9	**O fractal e o projeto**	a fronteira entre a taxa que converge e a que diverge	04/12, on-line
10	**A apresentação**	a apresentação do projeto e a revisão do curso inteiro	11/12, on-line

 Turma de 2026, presencial

Como é cada semana



O NIPS-CERN, o laboratório da UFJF que participa do ATLAS, no CERN

Revisão falada
15 minutos no começo de cada aula

Seminário
o estudo da semana e o código, linha a linha

Entrega
o código no GitHub e uma pergunta, até a sexta

Colaboração
o trabalho final feito junto, como no CERN

3 · Aprender com dados

Como escrever um programa que reconhece um 7 escrito à mão?



Dígitos do MNIST, escritos à mão por funcionários do censo dos Estados Unidos e por estudantes. Imagem: Josef Steppan, Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0

Aprender a partir de exemplos

Exemplo rotulado	uma entrada e a resposta certa para ela
Aprendizado supervisionado	aprender a partir de exemplos rotulados, comparando o que a máquina respondeu com o que devia ter respondido
Padrão	uma regularidade que se repete nos dados. Uma rede neural é uma máquina de achar padrões

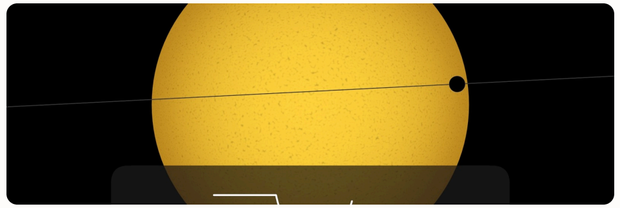
A mesma ferramenta, dados diferentes



99,35%

de acerto em fotos de folhas, com 38 classes

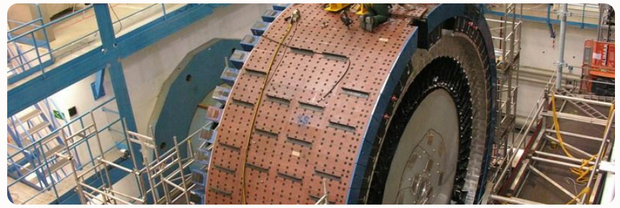
Mohanty, Hughes e Salathé, 2016



Kepler-90 i

um planeta achado por uma rede no brilho das estrelas

Shallue e Vanderburg, 2018



Calorímetro

a amplitude do pulso, estimada em sinais simulados

Diogo, Bernardo, Gustavo e Luciano, do NIPS-CERN, 2026

Imagens do Wikimedia Commons: Scot Nelson, CC0; NASA, domínio público; Argonne, CC BY-SA 2.0

99,35% → 31%

A mesma rede das folhas, testada em fotos de outras fontes, achadas na internet.

Generalização: acertar em dado que a rede nunca viu. É o problema do SIENA.

De onde vem o neurônio artificial

1943

McCulloch e Pitts

o neurônio de conta: soma ponderada e limiar

McCulloch estudava o cérebro; Pitts, lógica

1958

Rosenblatt

o perceptron, o primeiro neurônio que aprende os próprios pesos

psicólogo, 1928 a 1971; a Marinha dos Estados Unidos pagou a máquina

1969

Minsky e Papert

o livro Perceptrons mostra os limites de um neurônio sozinho

a pesquisa em redes neurais encolhe nos anos 1970

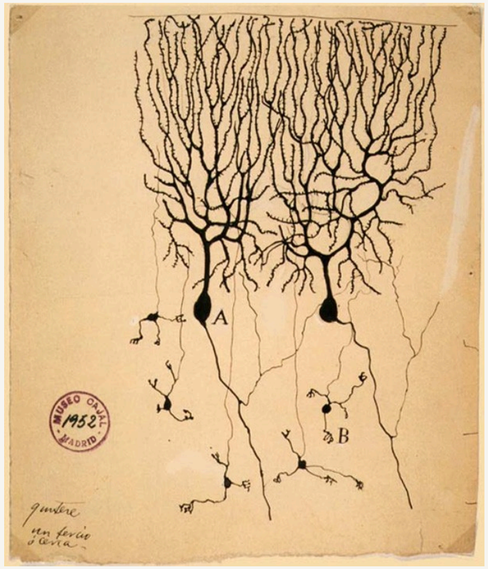
1986

Rumelhart, Hinton e Williams

a retropropagação, que chega na aula 5

Hinton dividiu o Nobel de Física de 2024 com John Hopfield

A inspiração: o neurônio de verdade



Santiago Ramón y Cajal, neurocientista espanhol, Nobel de Fisiologia ou Medicina de 1906: células do cerebelo de pombo, desenho de 1899. Domínio público.

O neurônio recebe sinais de outras células pelos dendritos, os ramos do desenho.

Quando o estímulo acumulado passa de um limiar, ele dispara um sinal pelo axônio.

Ou dispara por inteiro, ou não dispara: tudo ou nada.

O neurônio artificial copia só essa ideia: somar as entradas e disparar acima de um limiar.

Vetor, produto escalar e somatório

Vetor

no curso, uma lista ordenada de *n* números reais

$$\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$$

o vetor das entradas é a lista x_1, x_2, até x_n, e pertence a $\mathbb{R}^n$, o conjunto das listas de *n* números reais

Produto escalar

multiplica termo a termo e soma

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

Somatório

a mesma soma, escrita curta; Σ é o sigma grego, de soma

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} w_k\, x_k$$

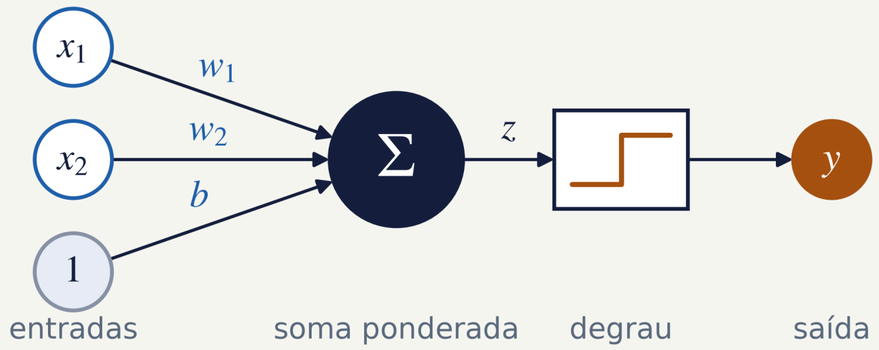
somatório, de *k* igual a 1 até *n*, de w_k vezes x_k

O neurônio

um produto escalar mais o viés *b*

$$z = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$$

Um neurônio, três passos



A terceira entrada vale sempre 1, e o peso da linha dela é o viés: $b \cdot 1 = b$. É o jeito clássico de desenhar o viés.

1 **Pesar** cada entrada vezes o seu peso

$w_1 x_1$ e $w_2 x_2$

2 **Somar** os produtos e o viés b

$$z = w_1 x_1 + w_2 x_2 + b$$

3 **Disparar** dar saída 1; o degrau decide

$$y = \text{degrau}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \geq 0 \\ 0, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

E, OU e XOR: as tabelas-verdade

	função	**E**	**OU**	**XOR**
	vale 1 quando	as duas são 1	pelo menos uma é 1	só uma é 1
x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	**0**
	em Python	`x1 & x2`	`x1 | x2`	`x1 ^ x2`

Em Python, ^ é o XOR, e não a potência: 2 ^ 3 dá 1. A potência se escreve 2 ** 3, que dá 8.

Um neurônio que calcula o E

x_1	x_2	z	y
0	0	−1,5	0
0	1	−0,5	0
1	0	−0,5	0
1	1	**0,5**	**1**

Só a entrada (1; 1) dispara: é o E.

$$z = w_1 x_1 + w_2 x_2 + b$$

$$\downarrow \quad w_1 = w_2 = 1, \;\; b = -1{,}5$$

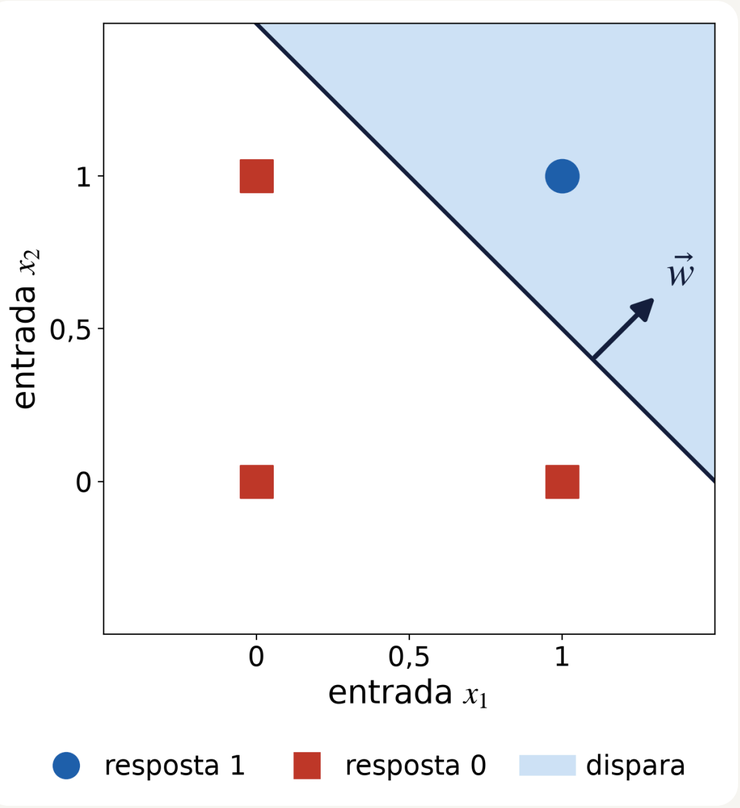
$$z = x_1 + x_2 - 1{,}5$$

$$(1;\,0): \quad z = 1 + 0 - 1{,}5 = -0{,}5 < 0 \quad \Rightarrow \; y = 0$$

$$(1;\,1): \quad z = 1 + 1 - 1{,}5 = 0{,}5 \geq 0 \quad \Rightarrow \; y = 1$$

Que valor de b faz o OU?

Cada neurônio desenha uma reta



A RETA

$z = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1{,}5$ *z* é 0 se, e somente se, x_1 mais x_2 for igual a 1,5

$(1;\ 1)\colon \quad z = 0{,}5 > 0 \quad \Rightarrow$ dispara

$(1;\ 0)\colon \quad z = -0{,}5 < 0 \quad \Rightarrow$ não dispara

$\vec{w} \cdot (-1{,}5;\ 1{,}5) = -1{,}5 + 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{w} \perp$ reta

(–1,5; 1,5) é o deslocamento sobre a reta, de (1,5; 0) a (0; 1,5); produto escalar zero é ser perpendicular. Andar o vetor dos pesos a partir da reta soma 2 a *z*: o lado que dispara

Linearmente separável

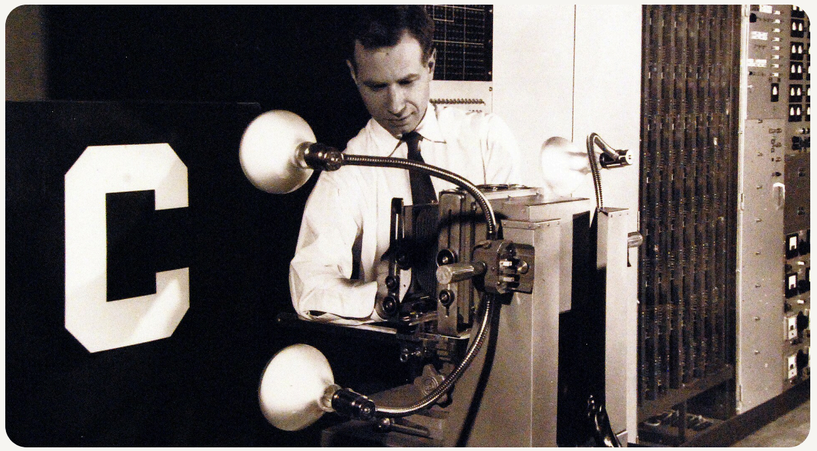
$\exists\, \vec{w}, b \quad \forall\, (\vec{x}, t)\colon \quad \text{degrau}(\vec{w} \cdot \vec{x} + b) = t$

existem pesos e viés tais que, para todo exemplo, o degrau da soma ponderada é igual à resposta certa *t*: uma reta deixa as respostas 1 de um lado e as respostas 0 do outro

1958: o perceptron de Rosenblatt

> *“A Marinha revelou hoje o embrião de um computador eletrônico que ela espera que seja capaz de andar, falar, ver, escrever, se reproduzir e ter consciência da própria existência.”*
>
> The New York Times, 8 de julho de 1958, tradução livre

- Frank Rosenblatt, psicólogo, 1928 a 1971
- Mark I: 20 × 20 fotocélulas, 400 pixels
- pesos em potenciômetros girados por motores



O Mark I, que aprendia a reconhecer letras, diante de uma letra C. Foto da Marinha dos Estados Unidos, 1960, domínio público.

DE ONDE VEM O NOME: PERCEPTRON

de percepto, aquilo que se percebe, com o sufixo -tron, que em grego indica instrumento e ficou comum em nomes de máquinas depois do cíclotron.

5 · O PERCEPTRON E O XOR

A regra do perceptron

$$\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \eta\,(t - y)\,\vec{x}$$

$$b \leftarrow b + \eta\,(t - y)$$

t é a resposta certa; y, a saída do neurônio; η, a letra grega eta, é a taxa de aprendizado, o tamanho de cada correção; $\leftarrow$ se lê “passa a valer”.

OS TRÊS CASOS

$$\begin{aligned} \text{acertou:} \quad & t - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nada muda} \\ \text{devia ser 1:} \quad & t - y = +1 \quad \Rightarrow \quad \vec{w} \leftarrow \vec{w} + \eta\,\vec{x} \\ \text{devia ser 0:} \quad & t - y = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta\,\vec{x} \end{aligned}$$

Exemplo, com $\eta = 1$: a entrada (1; 1) na época 1

antes, os pesos eram (0; 0) e o viés, −1; saiu $y = 0$, e a resposta certa é $t = 1$

$$t - y = 1 - 0 = 1$$

$$\vec{w} \leftarrow (0;\ 0) + 1 \cdot 1 \cdot (1;\ 1) = (1;\ 1)$$

$$b \leftarrow -1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Duas épocas do E, à mão

Época: uma passada por todos os exemplos. Pesos e viés começam em zero; $\eta = 1$.

Época	Entrada	t	z	y	Errou?	$\vec{w}$ depois	b depois
1	(0; 0)	0	0	1	sim	(0; 0)	−1
1	(0; 1)	0	−1	0	não	(0; 0)	−1
1	(1; 0)	0	−1	0	não	(0; 0)	−1
1	(1; 1)	1	−1	0	sim	(1; 1)	0
2	(0; 0)	0	0	1	sim	(1; 1)	−1
2	(0; 1)	0	0	1	sim	(1; 0)	−2
2	(1; 0)	0	−1	0	não	(1; 0)	−2
2	(1; 1)	1	−1	0	sim	(2; 1)	−1

5 · O PERCEPTRON E O XOR

1969: nenhuma reta separa o XOR

$$x_1 \oplus x_2 = 1 \iff x_1 \neq x_2$$

O XOR, o ou exclusivo, vale 1 quando as duas entradas são diferentes. Os círculos ficam em diagonal, e nenhuma reta os separa dos quadrados.

AULA 3

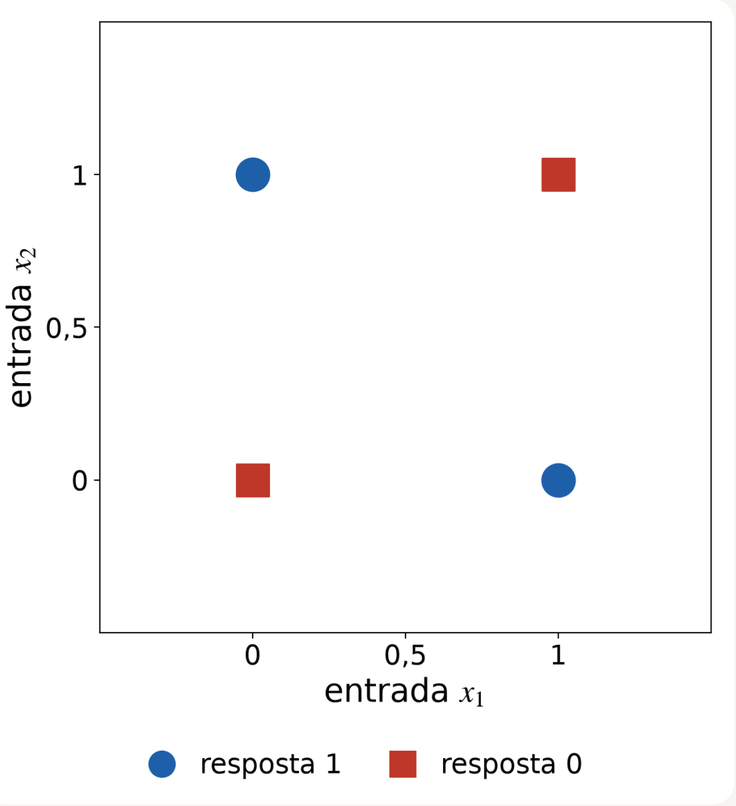
Rede neural

neurônios em camadas: a saída de uns é a entrada de outros

AULA 5

Retropropagação

o método de 1986 que acha os pesos sozinho



Por que nenhuma reta separa o XOR

Suponha um neurônio que acerte o XOR: $\text{degrau}(w_1 x_1 + w_2 x_2 + b) = x_1 \oplus x_2$

O QUE CADA ENTRADA EXIGE

$$(0;\ 0) \mapsto 0: \quad b < 0 \quad (1)$$

$$(1;\ 1) \mapsto 0: \quad w_1 + w_2 + b < 0 \quad (2)$$

$$(0;\ 1) \mapsto 1: \quad w_2 + b \geq 0 \quad (3)$$

$$(1;\ 0) \mapsto 1: \quad w_1 + b \geq 0 \quad (4)$$

$(0;\ 0) \mapsto 0$: a entrada $(0;\ 0)$ tem de dar 0, o que exige $b < 0$; o mesmo nas outras três linhas

A CONTA

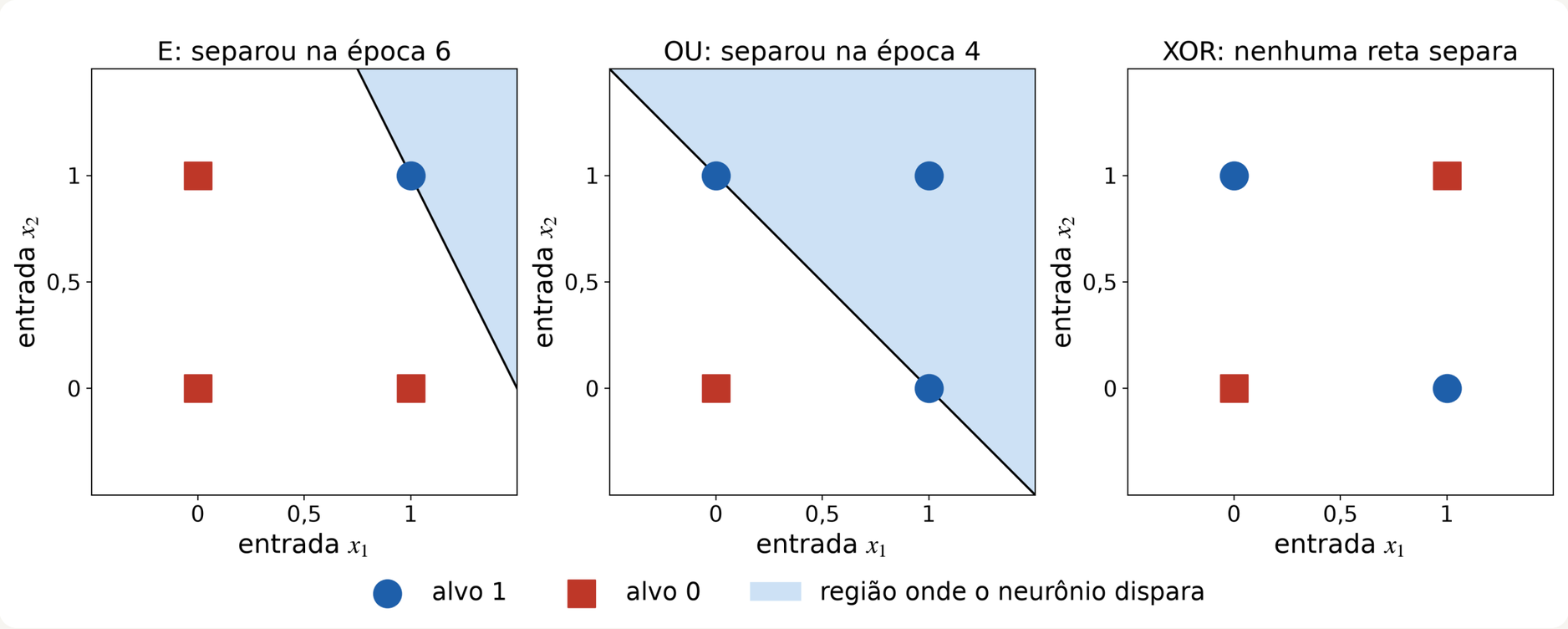
$$(3) + (4): \quad w_1 + w_2 + 2b \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad w_1 + w_2 + b \geq -b > 0 \quad \text{por } (1)$$

$w_1 + w_2 + b > 0$ contradiz (2)

Logo, esse neurônio não existe.

E e OU se separam; o XOR, não




```
python aulas/01-neuronio/codigo/perceptron.py
```

7 · FECHAMENTO Turma de 2026, presencial

Até a próxima sexta

Vídeos, nesta ordem

- 3Blue1Brown, redes neurais, capítulo 1
- 3Blue1Brown, cálculo, capítulo 2: a derivada
- 3Blue1Brown, redes neurais, capítulo 2

Entrega até 02/10

- ambiente instalado
- conta no GitHub
- perceptron de E e OU que imprime a tabela das épocas
- uma pergunta sobre os vídeos

Seminário da aula 2

- o perceptron de E e OU, linha a linha
- neurônio entre 0 e 1, contra 0 ou 1
- custo, no vídeo, e perda, aqui
- o paradoxo da derivada