

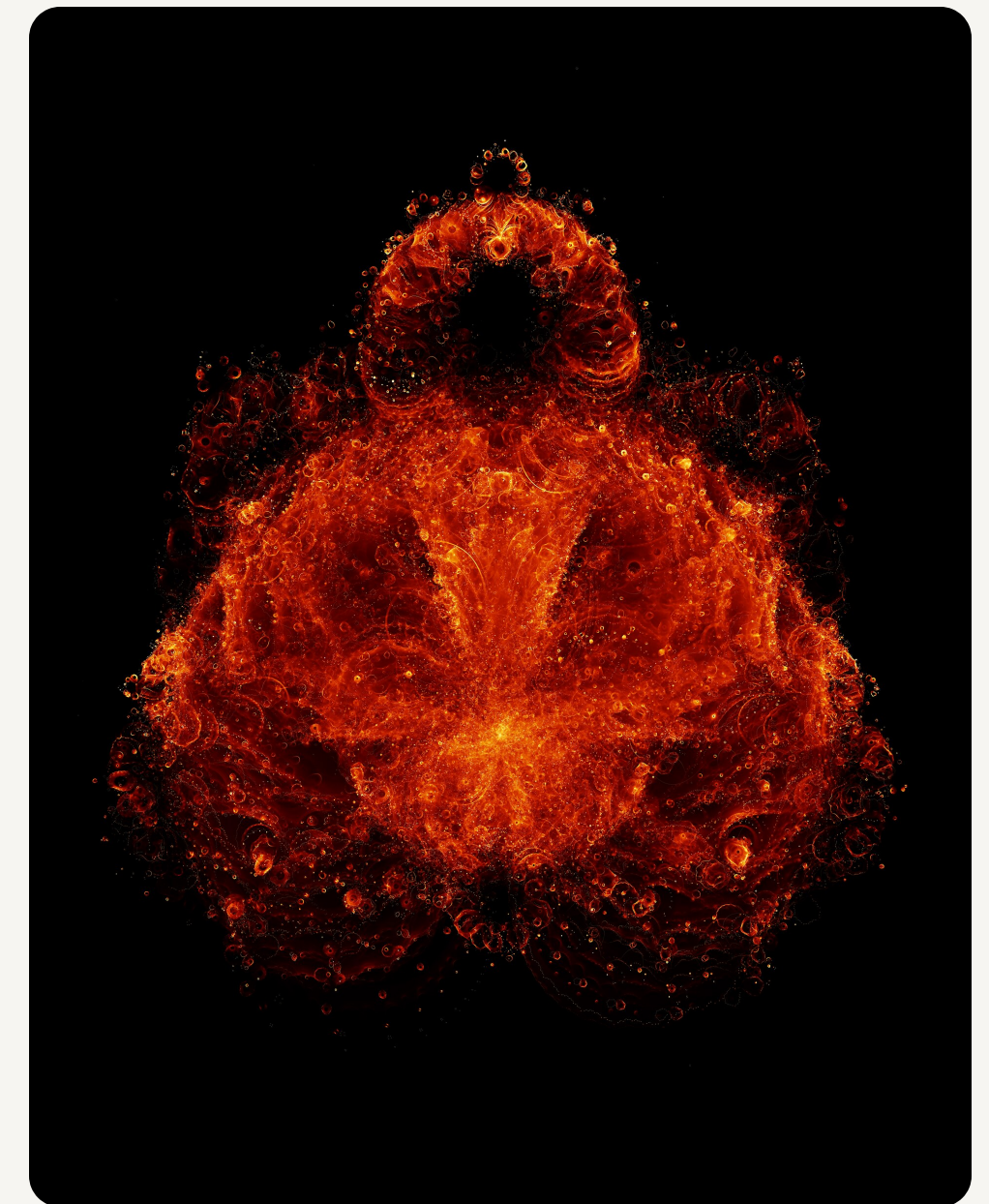
SIENA, NIPS-CERN, UFJF

Limiar

Redes neurais, do neurônio ao fractal

Aula 1: o neurônio e o perceptron

25/09/2026. C.: Chrysthofer A. A. Afonso



Buddhabrot: o conjunto de Mandelbrot desenhado pelos caminhos dos pontos que fogem. Imagem: Johann Korndoerfer, Wikimedia Commons, CC BY 3.0 DE

O que ficou da aula de quarta

O que é um modelo?

O que é treinar?

O que é a função de perda?

Por que as redes só deram certo depois de 2012?

Limiar: o nome do curso

Limiar

do latim liminaris, relativo à soleira da porta: o ponto em que se passa de um lado para o outro, e também o começo de alguma coisa.

1 Neurônio

o neurônio artificial dispara quando a soma das entradas passa de um limiar

2 Projeto

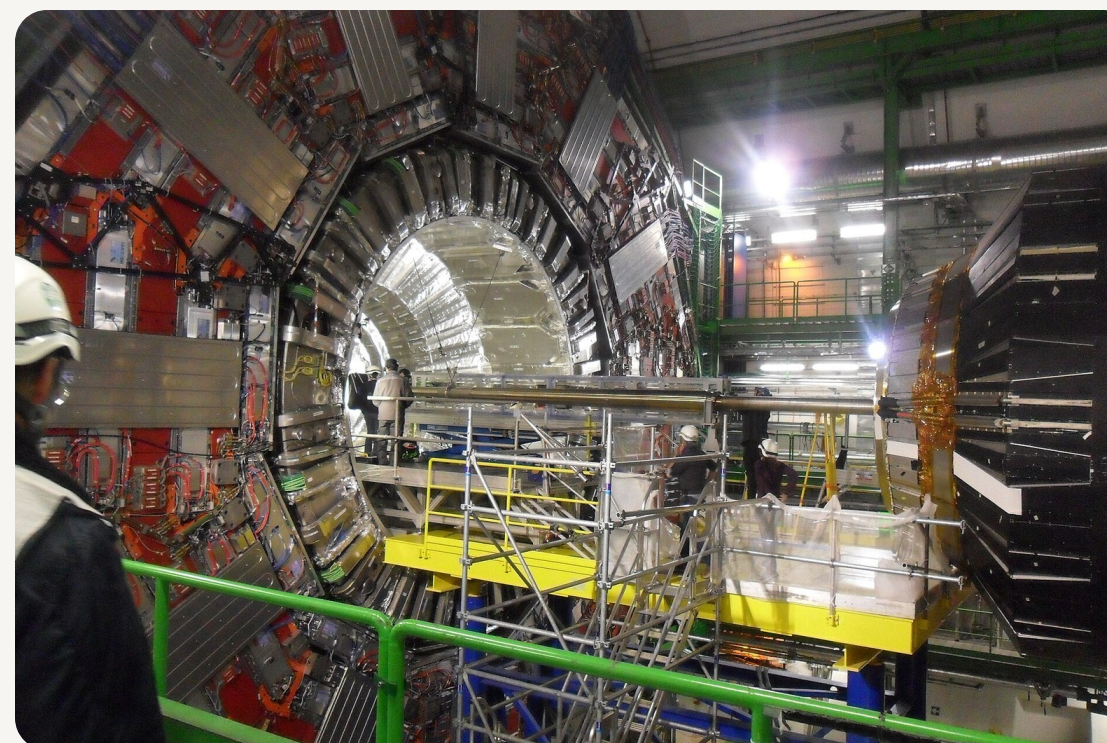
o projeto de dezembro desenha o limiar entre o treino que dá certo e o que explode

3 Pesquisa

para quem acabou de entrar na graduação, o curso é o limiar da pesquisa

O projeto de dezembro

- 1 Dados reais do CMS, um dos detectores do CERN.
- 2 A mesma rede, treinada milhares de vezes, com taxas de aprendizado diferentes.
- 3 Um mapa de onde o treino dá certo e de onde explode.



À esquerda, o CMS, um dos quatro grandes detectores do LHC, no CERN; foto de Vineet Menon, CC BY-SA 2.0. À direita, múons numa câmara de nuvens; foto antiga, autor não identificado. As duas do Wikimedia Commons.

DE ONDE VEM O NOME: FRACTAL

do latim fractus, quebrado; nome criado por Benoit Mandelbrot em 1975, como a figura da capa.

Como é cada semana



O NIPS-CERN, o laboratório da UFJF que participa do ATLAS, no CERN



Revisão falada

15 minutos no começo de cada aula



Seminário

o estudo da semana e o código, linha a linha



Entrega

o código no GitHub e uma pergunta, até a sexta



Colaboração

o trabalho final dividido na turma, como no CERN

3 · Aprender com dados

Como escrever um programa que reconhece um 7 escrito à mão?



Dígitos do MNIST, escritos à mão por funcionários do censo dos Estados Unidos e por estudantes. Imagem: Josef Steppan, Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0

Aprender a partir de exemplos

Exemplo rotulado

uma entrada e a resposta certa para ela

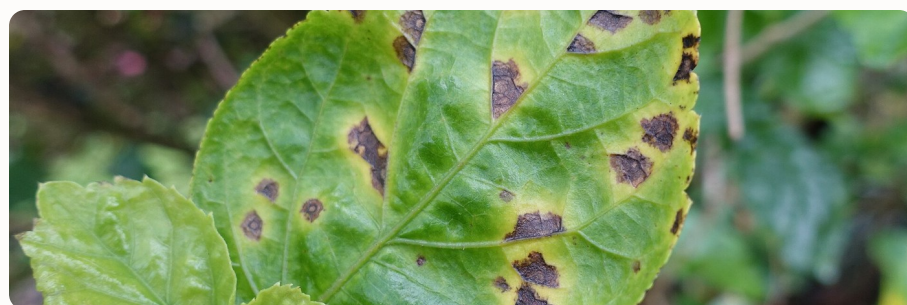
Aprendizado supervisionado

aprender a partir de exemplos rotulados, comparando o que a máquina respondeu com o que devia ter respondido

Padrão

uma regularidade que se repete nos dados. Uma rede neural é uma máquina de achar padrões

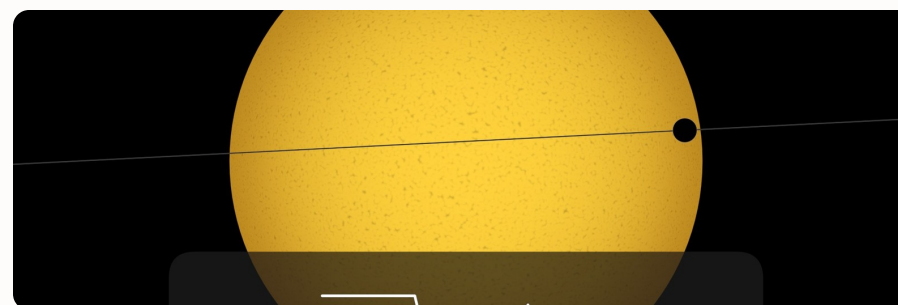
A mesma ferramenta, dados diferentes



99,35%

de acerto em fotos de folhas,
com 38 classes

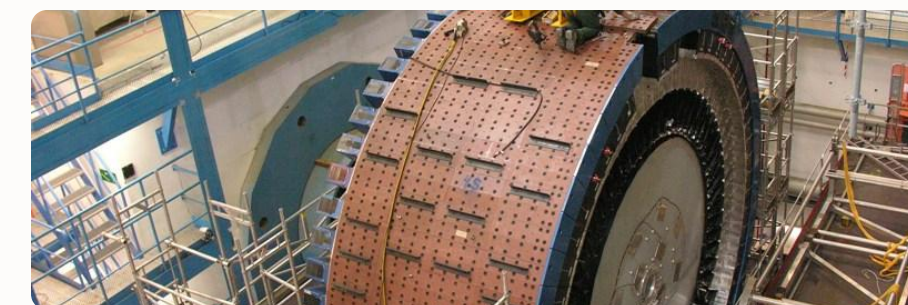
Mohanty, Hughes e Salathé, 2016



Kepler-90 i

um planeta achado por uma
rede no brilho das estrelas

Shallue e Vanderburg, 2018



Calorímetro

a amplitude do pulso,
estimada em sinais simulados

Diogo, Bernardo, Gustavo e Luciano, do
NIPS-CERN, 2026

Imagens do Wikimedia Commons: Scot Nelson, CC0; NASA, domínio público; Argonne, CC BY-SA 2.0

3 · Aprender com dados

99,35% → 31%

A mesma rede das folhas, testada em fotos de outras fontes, achadas na internet.

Generalização: acertar em dado que a rede nunca viu. É o problema do SIENA.

De onde vem o neurônio artificial

1943

McCulloch e Pitts

o neurônio de conta: soma ponderada e limiar

McCulloch estudava o cérebro; Pitts, lógica

1958

Rosenblatt

o perceptron, o primeiro neurônio que aprende os próprios pesos

psicólogo, 1928 a 1971; a Marinha dos Estados Unidos pagou a máquina

1969

Minsky e Papert

o livro Perceptrons mostra os limites de um neurônio sozinho

a pesquisa em redes neurais encolhe nos anos 1970

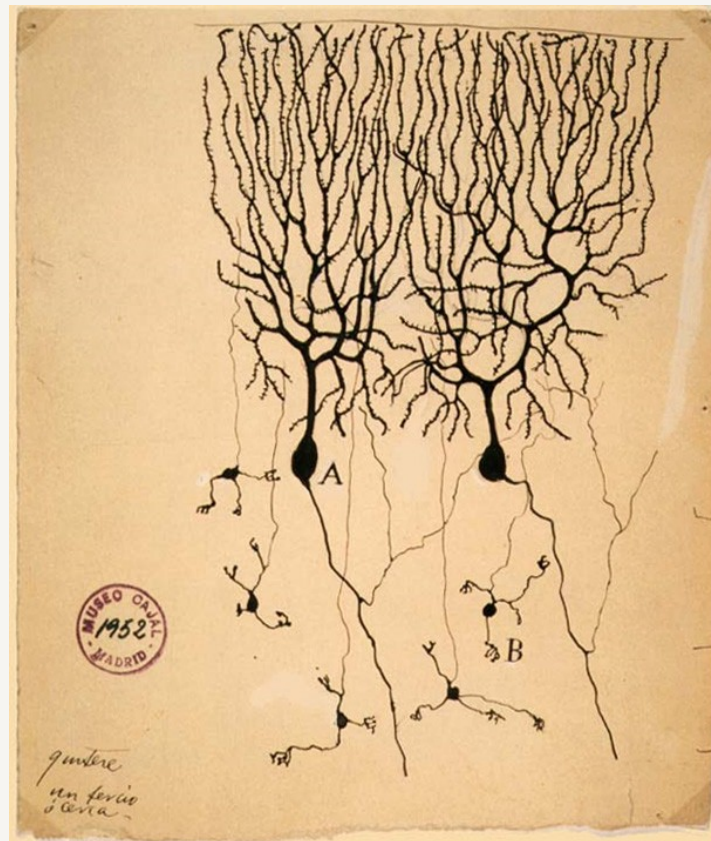
1986

Rumelhart, Hinton e Williams

a retropropagação, que chega na aula 5

Hinton dividiu o Nobel de Física de 2024 com John Hopfield

A inspiração: o neurônio de verdade



Santiago Ramón y Cajal, neurocientista espanhol, Nobel de Fisiologia ou Medicina de 1906: células do cerebello de pombo, desenho de 1899. Domínio público.

O neurônio recebe sinais de outras células pelos dendritos, os ramos do desenho.

Quando o estímulo acumulado passa de um limiar, ele dispara um sinal pelo axônio.

Ou dispara por inteiro, ou não dispara: tudo ou nada.

O neurônio artificial copia só essa ideia: somar as entradas e disparar acima de um limiar.

Vetor, produto escalar e somatório

Vetor

no curso, uma lista ordenada de n números reais

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o vetor das entradas é a lista x_1, x_2 , até x_n , e pertence a $\mathbb{R}^n$, o conjunto das listas de n números reais

Produto escalar

multiplica termo a termo e soma

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

Somatório

a mesma soma, escrita curta; Σ é o sigma grego, de soma

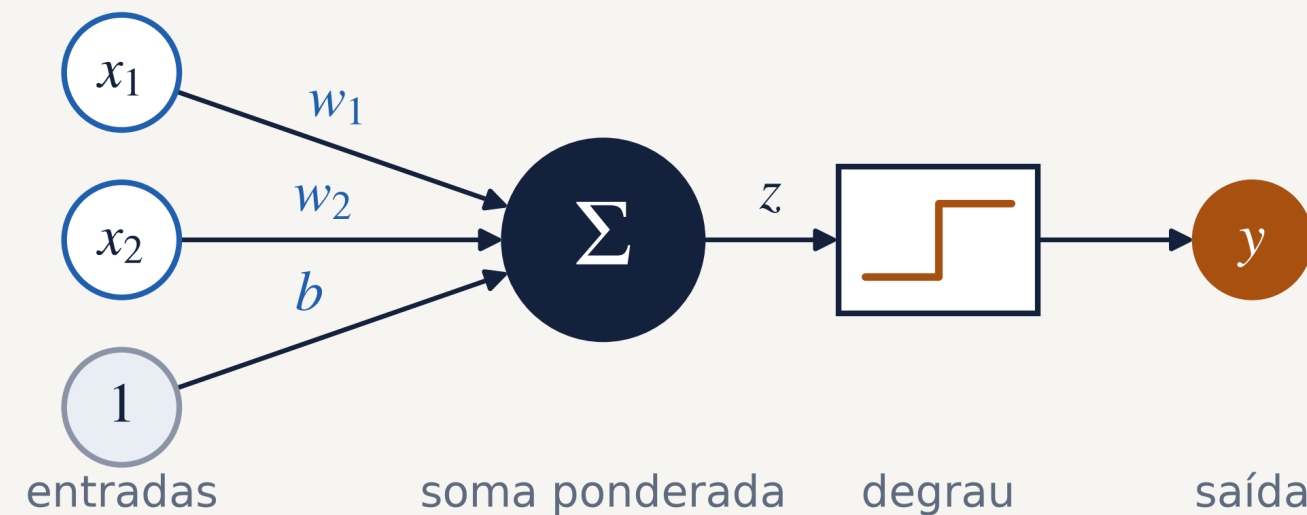
$$\vec{w} \cdot \vec{x} = \sum_{k=1}^n w_k x_k \quad \text{somatório, de } k \text{ igual a } 1 \text{ até } n, \text{ de } w_k \text{ vezes } x_k$$

O neurônio

um produto escalar mais o viés b

$$z = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$$

Um neurônio, três passos



A terceira entrada vale sempre 1, e o peso da linha dela é o viés:
 $b \cdot 1 = b$. É o jeito clássico de desenhar o viés.

1 Pesar cada entrada vezes o seu peso
 w_1x_1 e w_2x_2

2 Somar os produtos e o viés b
 $z = w_1x_1 + w_2x_2 + b$

3 Disparar dar saída 1; o degrau decide

$$y = \text{degrau}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \geq 0 \\ 0, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

E, OU e XOR: as tabelas-verdade

função		E	OU	XOR
vale 1 quando		as duas são 1	pelo menos uma é 1	só uma é 1
x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0
em Python		$x1 \ \& \ x2$	$x1 \ \ x2$	$x1 \ ^ \ x2$

Em Python, ^ é o XOR, e não a potência: 2 ^ 3 dá 1. A potência se escreve 2 ** 3, que dá 8.

Um neurônio que calcula o E

x_1	x_2	z	y
0	0	-1,5	0
0	1	-0,5	0
1	0	-0,5	0
1	1	0,5	1

Só a entrada (1, 1) dispara: é o E.

$$z = w_1x_1 + w_2x_2 + b$$

$$\downarrow w_1 = w_2 = 1, \quad b = -1,5$$

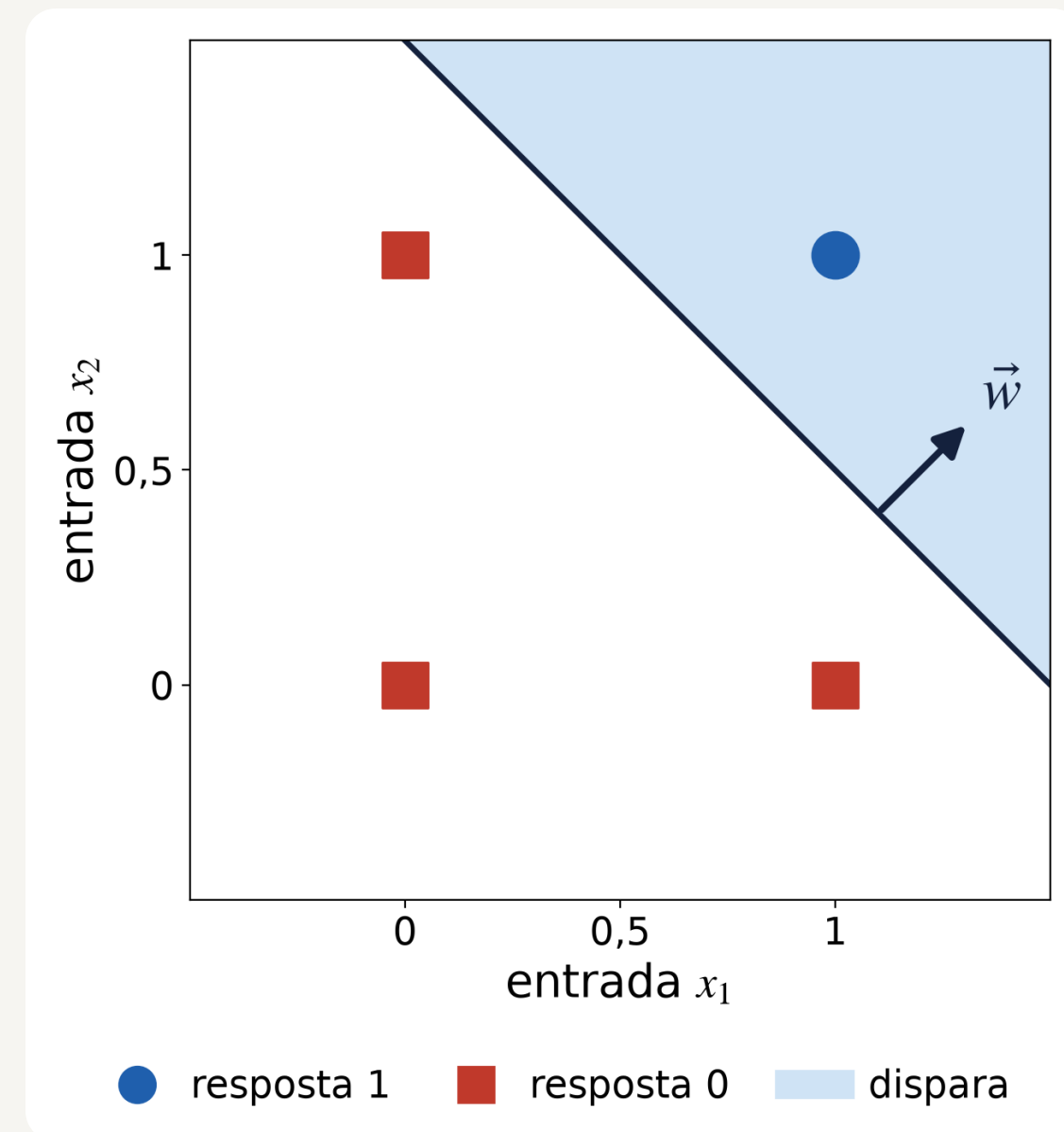
$$z = x_1 + x_2 - 1,5$$

$$(1, 0): \quad z = 1 + 0 - 1,5 = -0,5 < 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

$$(1, 1): \quad z = 1 + 1 - 1,5 = 0,5 \geq 0 \quad \Rightarrow y = 1$$

Que valor de b faz o OU?

Cada neurônio desenha uma reta



A RETA

$z = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1,5$ z é 0 se, e somente se, x_1 mais x_2 for igual a 1,5

$(1, 1): z = 0,5 > 0 \Rightarrow$ dispara

$(1, 0): z = -0,5 < 0 \Rightarrow$ não dispara

$\vec{w} \cdot (-1,5; 1,5) = -1,5 + 1,5 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \text{reta}$

$(-1,5; 1,5)$ é o deslocamento sobre a reta, de $(1,5; 0)$ a $(0; 1,5)$; produto escalar zero é ser perpendicular. Andar o vetor dos pesos a partir da reta soma 2 a z : o lado que dispara

Linearmente separável

$$\exists \vec{w}, b \quad \forall (\vec{x}, t): \text{degrau}(\vec{w} \cdot \vec{x} + b) = t$$

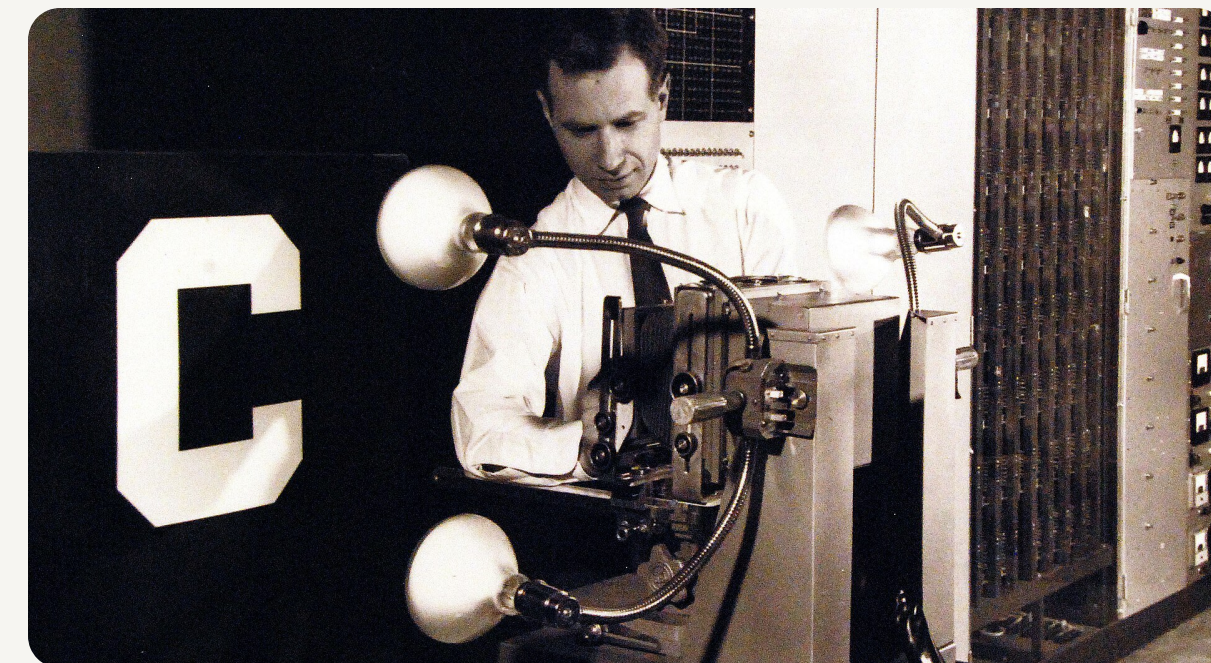
existem pesos e viés tais que, para todo exemplo, o degrau da soma ponderada é igual à resposta certa t : uma reta deixa as respostas 1 de um lado e as respostas 0 do outro

1958: o perceptron de Rosenblatt

“A Marinha revelou hoje o embrião de um computador eletrônico que ela espera que seja capaz de andar, falar, ver, escrever, se reproduzir e ter consciência da própria existência.”

The New York Times, 8 de julho de 1958, tradução livre

- Frank Rosenblatt, psicólogo, 1928 a 1971
- Mark I: 20 × 20 fotocélulas, 400 pixels
- pesos em potenciômetros girados por motores



O Mark I, que aprendia a reconhecer letras, diante de uma letra C. Foto da Marinha dos Estados Unidos, 1960, domínio público.

DE ONDE VEM O NOME: PERCEPTRON

de percepto, aquilo que se percebe, com o sufixo -tron, que em grego indica instrumento e ficou comum em nomes de máquinas depois do cíclotron.

A regra do perceptron

$$\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \eta (t - y) \vec{x}$$
$$b \leftarrow b + \eta (t - y)$$

t é a resposta certa; y , a saída do neurônio; η , a letra grega eta, é a taxa de aprendizado, o tamanho de cada correção; $\leftarrow$ se lê “passa a valer”.

OS TRÊS CASOS

acertou: $t - y = 0 \Rightarrow$ nada muda

devia ser 1: $t - y = +1 \Rightarrow \vec{w} \leftarrow \vec{w} + \eta \vec{x}$

devia ser 0: $t - y = -1 \Rightarrow \vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \vec{x}$

Exemplo, com $\eta = 1$: a entrada (1, 1) na época 1

antes, os pesos eram (0, 0) e o viés, -1; saiu $y = 0$, e a resposta certa é $t = 1$

$$t - y = 1 - 0 = 1$$

$$\vec{w} \leftarrow (0, 0) + 1 \cdot 1 \cdot (1, 1) = (1, 1)$$

$$b \leftarrow -1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Duas épocas do E, à mão

Época: uma passada por todos os exemplos. Pesos e viés começam em zero; $\eta = 1$.

Época	Entrada	t	z	y	Errou?	$\vec{w}$ depois	b depois
1	(0, 0)	0	0	1	sim	(0, 0)	-1
1	(0, 1)	0	-1	0	não	(0, 0)	-1
1	(1, 0)	0	-1	0	não	(0, 0)	-1
1	(1, 1)	1	-1	0	sim	(1, 1)	0
2	(0, 0)	0	0	1	sim	(1, 1)	-1
2	(0, 1)	0	0	1	sim	(1, 0)	-2
2	(1, 0)	0	-1	0	não	(1, 0)	-2
2	(1, 1)	1	-1	0	sim	(2, 1)	-1

1969: nenhuma reta separa o XOR

$$x_1 \oplus x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$$

O XOR, o ou exclusivo, vale 1 quando as duas entradas são diferentes. Os círculos ficam em diagonal, e nenhuma reta os separa dos quadrados.

AULA 3

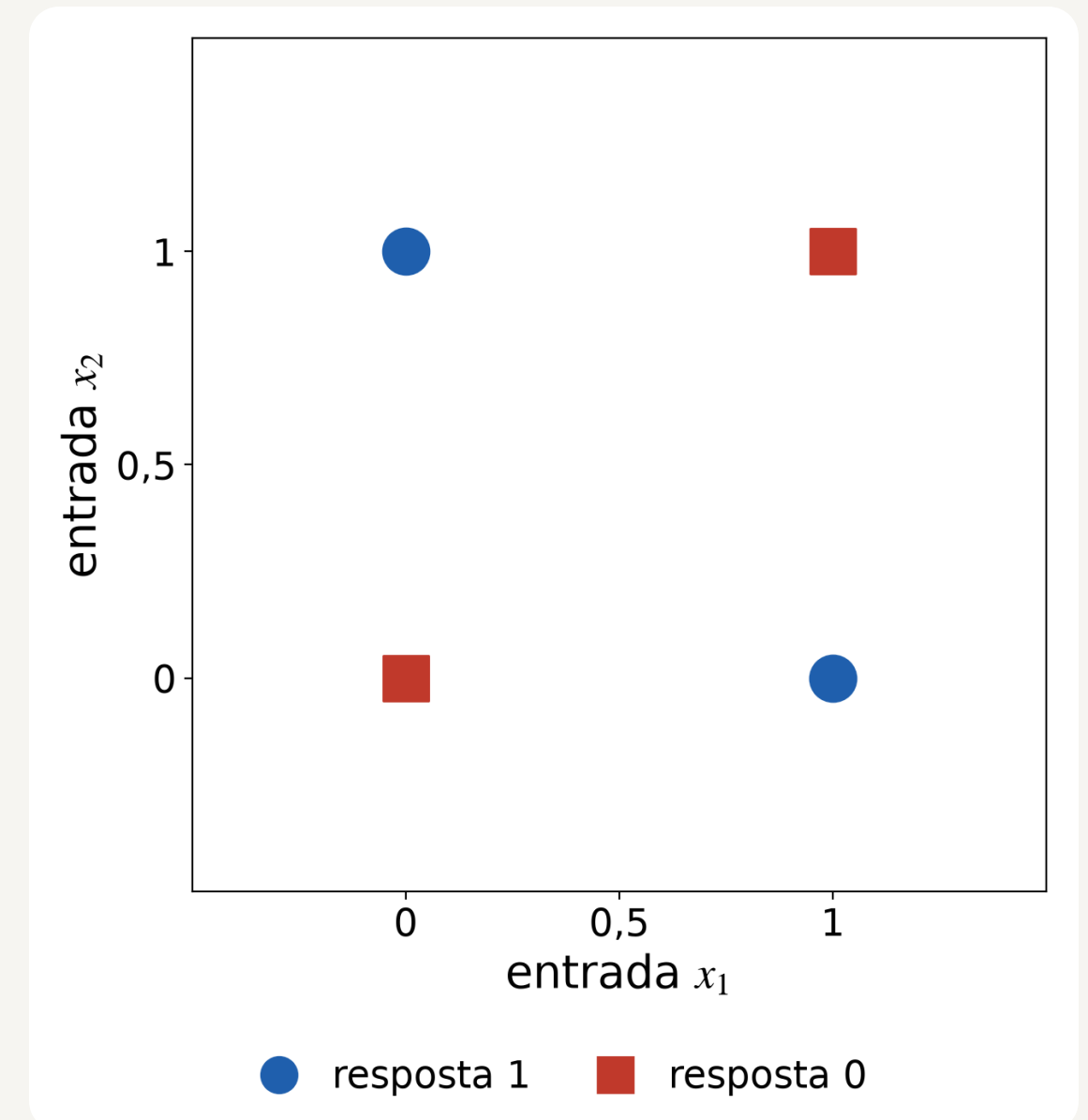
Rede neural

neurônios em camadas: a saída de uns é a entrada de outros

AULA 5

Retropropagação

o método de 1986 que acha os pesos sozinho



Por que nenhuma reta separa o XOR

Suponha um neurônio que acerte o XOR: $\text{degrau}(w_1x_1 + w_2x_2 + b) = x_1 \oplus x_2$

O QUE CADA ENTRADA EXIGE

$$(0, 0) \mapsto 0: \quad b < 0 \quad (1)$$

$$(1, 1) \mapsto 0: \quad w_1 + w_2 + b < 0 \quad (2)$$

$$(0, 1) \mapsto 1: \quad w_2 + b \geq 0 \quad (3)$$

$$(1, 0) \mapsto 1: \quad w_1 + b \geq 0 \quad (4)$$

$(0, 0) \mapsto 0$: a entrada $(0, 0)$ tem de dar 0, o que exige $b < 0$; o mesmo nas outras três linhas

A CONTA

$$(3) + (4): \quad w_1 + w_2 + 2b \geq 0$$

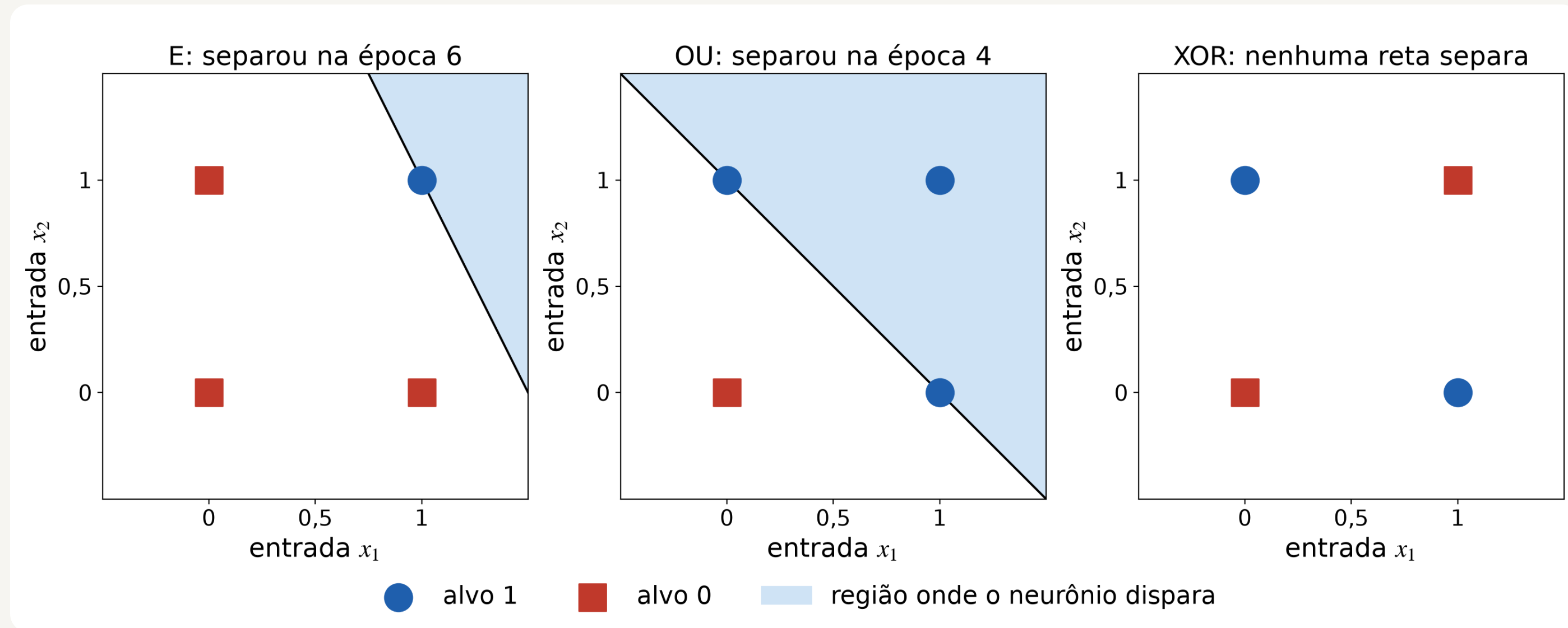
$$\Rightarrow \quad w_1 + w_2 + b \geq -b > 0 \quad \text{por (1)}$$

$$w_1 + w_2 + b > 0 \quad \text{contradiz} \quad (2)$$

Logo, esse neurônio não existe.

6 · O CÓDIGO

E e OU se separam; o XOR, não



`python aulas/01-neuronio/codigo/perceptron.py`

Até a próxima sexta



Vídeos, nesta ordem

- 3Blue1Brown, redes neurais, capítulo 1
- 3Blue1Brown, cálculo, capítulo 2: a derivada
- 3Blue1Brown, redes neurais, capítulo 2



Entrega até 02/10

- ambiente instalado
- conta no GitHub
- perceptron de E e OU que imprime a tabela das épocas
- uma pergunta sobre os vídeos



Seminário da aula 2

- o perceptron de E e OU, linha a linha
- neurônio entre 0 e 1, contra 0 ou 1
- custo, no vídeo, e perda, aqui
- o paradoxo da derivada